

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI  
 UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG  
 FAKULTAS MIPA JURUSAN MATEMATIKA

UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP 2018/2019

MATA KULIAH : STATISTIKA MATEMATIKA DOSEN : ENDANG WAHYU H., S.Si., M.Si.  
 MILA KURNIAWATY, S.Si., M.Si., Ph.D  
 SIFAT UJIAN : TERTUTUP TANGGAL: SENIN, 20-05-2019  
 PROGRAM STUDI: MATEMATIKA ABC WAKTU : 90 MENIT

Bacalah dengan seksama dan kemudian selesaikan semua soal berikut.

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah sampel acak dari distribusi uniform  $(\alpha, \beta)$  dengan  $\alpha = 0$ . Diketahui bahwa  $\frac{n+1}{n} Y_n$  adalah estimator takbias dari  $\beta$ .

- (a) Tunjukkan bahwa  $2\bar{X}$  juga estimator takbias dari  $\beta$ .
- (b) Bandingkan efisiensi dari dua estimator  $\beta$ .

Catatan:  $\frac{n+1}{n} Y_n$  atau  $2\bar{X}$

$$X \sim \text{UNIF}(\alpha, \beta) \implies E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{Var}(X) = \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^2.$$

$$Y_n = \text{maks} \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \implies f(y_n) = n (F_x(y_n))^{n-1} f_x(y_n), \quad a < y_n < b.$$

2. Diketahui distribusi prior dari peubah acak  $\Theta$  adalah  $\text{Beta}(\alpha, \beta)$  dengan fungsi kepadatan peluang

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Diketahui juga sampel acak ukuran  $n$ , yaitu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dimana  $X_i | \Theta$  berdistribusi Binomial( $1, \theta$ ), dengan demikian suatu statistik cukup  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  berdistribusi Binomial( $n, \theta$ ) dengan fungsi kepadatan peluangnya

$$f(y|\theta) = \begin{cases} \binom{n}{y} \theta^y (1-\theta)^{n-y}, & y = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

- (a) Buktikan bahwa distribusi posteriornya yakni  $\Theta | Y$  berdistribusi  $\text{Beta}(\alpha + y, \beta + n - y)$ .
- (b) Apabila fungsi kerugian berbentuk  $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ , tunjukkan bahwa estimator bagi  $\theta$  adalah  $\hat{\theta} = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n x_i}{\alpha + \beta + n}$

3. Diketahui sampel acak ukuran  $n$ , yaitu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  yang berdistribusi  $N(\mu, \sigma^2)$ . Suatu transformasi  $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  berdistribusi  $N(0, 1)$ , dengan  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  merupakan statistik cukup bagi  $\mu$ . Dapatkan interval konfidensi  $(1 - \alpha)$  bagi  $\mu$ .

Selamat Mengerjakan dan Semoga Sukses